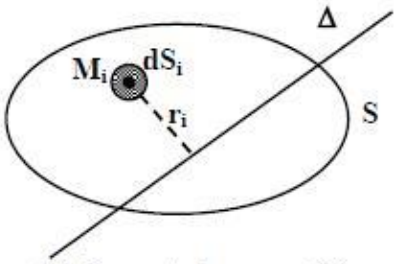
LE MOMENT QUADRATIQUE

1°/ Définition

Considérons toujours la même surface plane S constituée de n points matériels M_i, de surface élémentaire dS_i, et un axe Δ situé dans son plan.



On appelle moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe Δ la quantité :

$$\boxed{I_\Delta(S) = \iint_S r_i^{\,2}\, dS}$$ r_i étant la distance de dS_i à Δ.

Dans un repère orthonormé (O, x, y) :

$$I_{(O,x)}(S) = \iint_S y_i^{\,2}\, dS \quad \text{et} \quad I_{(O,y)}(S) = \iint_S x_i^{\,2}\, dS$$

Le moment quadratique s'exprime en m^4 ou plus souvent en cm^4

Le moment quadratique est toujours positif

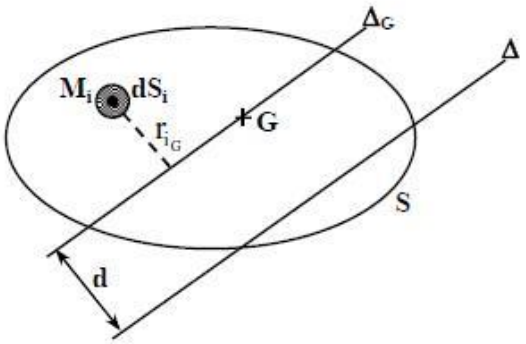
2°/ Théorème de Huygens

Théorème de Huygens :

« Le moment quadratique d'une surface plane S par rapport à un axe quelconque Δ de son plan est égal au moment quadratique de cette surface par rapport à un axe Δ_G parallèle à Δ et passant par le centre de gravité G de la surface S, augmenté du produit de l'aire de la surface S par le carré de la distance entre les deux axes. »

Théorème de Huygens :

$$\boxed{I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + S.d^2}$$



Démonstration :

Par définition : $I_\Delta(S) = \iint_S r_i^{\,2}\, dS$

Remplaçons r_i par sa valeur $r_i = r_{i_G} + d$:

$$\Rightarrow I_\Delta(S) = \iint_S \left(r_{i_G} + d\right)^2 dS$$

$$\Leftrightarrow I_\Delta(S) = \iint_S \left(r_{i_G}^{\,2} + 2r_{i_G}d + d^2\right) dS$$

$$\Leftrightarrow I_\Delta(S) = \iint_S r_{i_G}^{\,2}.dS + 2d\iint_S r_{i_G}.dS + d^2\iint_S dS$$

$$\left.\begin{array}{l} \iint_S r_{i_G}.dS = 0 \ \text{ définition du centre de gravité} \\ \iint_S dS = S \ \text{ surface de la sec tion considérée} \end{array}\right\} \Rightarrow I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + S.d^2$$

Remarque : le moment quadratique caractérise l'aptitude d'une section à tourner autour d'un axe :

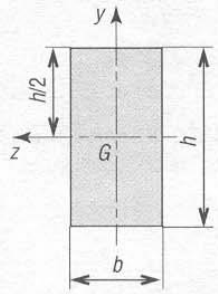
- plus le moment quadratique est grand, plus la section a du mal à tourner autour de l'axe,
- plus l'axe s'éloigne du centre de gravité, plus le moment quadratique est grand.

3°/ Moment quadratique des surfaces composées

Le moment quadratique d'une surface S, composées de plusieurs surfaces S_1, S_2, …, S_n, est égal à la somme arithmétique des moments quadratiques des n surfaces :

$$I_\Delta(S) = I_\Delta(S_1) + I_\Delta(S_2) + \ldots + I_\Delta(S_n)$$

FORMULAIRE MOMENT QUADRATIQUE

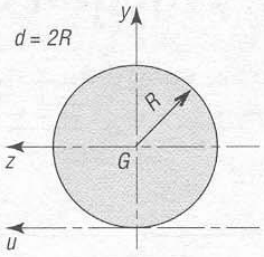


$$S = b\,h$$

$$I_z = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$I_G = \frac{b\,h}{12}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$

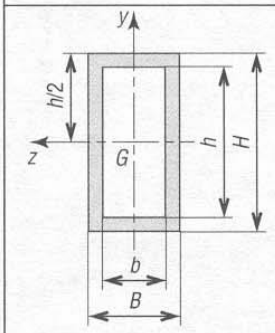


$$S = \pi R^2$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_u = \frac{5\,\pi R^4}{4} = \frac{5\,\pi d^4}{64}$$

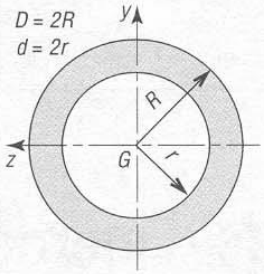
$$I_G = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} = I_y + I_z$$



$$S = BH - bh$$

$$I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$$

$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12} = I_y + I_z$$



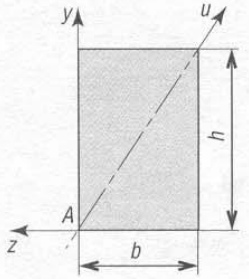
$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right)$$

$$= \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$

$$I_G = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$$

$$= \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = I_y + I_z$$

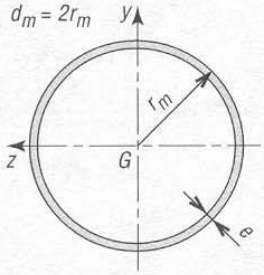


$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_u = \frac{b^3 h^3}{6\left(b^2 + h^2\right)}$$

$$I_A = \frac{b\,h}{3}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$



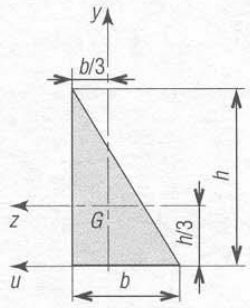
cas où *e* est faible

formules approchées

$$S = 2\,\pi\,r_m\,e = \pi\,e\,d_m$$

$$I_y = I_z = \pi\,e\,r_m^3 = \frac{\pi}{8}\,e\,d_m^3$$

$$I_G = 2\,\pi\,e\,r_m^3 = \frac{\pi}{4}\,e\,d_m^3$$



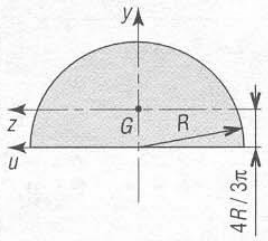
$$S = \frac{bh}{2}$$

$$I_y = \frac{h\,b^3}{36}$$

$$I_z = \frac{b\,h^3}{36}$$

$$I_u = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$I_G = \frac{b\,h}{36}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$



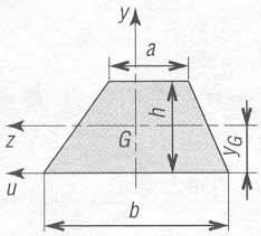
1/2 cercle

$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$I_z \approx 0{,}1098 \quad R^4$$

$$I_u = \frac{\pi R^4}{8}$$

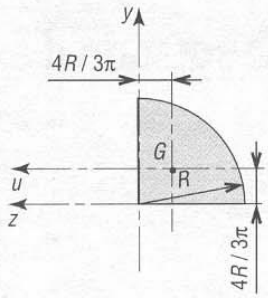


$$S = \frac{h}{2}\left(a + b\right)$$

$$y_G = \frac{h\left(2\,a + b\right)}{3\left(a + b\right)}$$

$$I_z = \frac{h^3\left(a^2 + 4\,ab + b^2\right)}{36\left(a + b\right)}$$

$$I_u = \frac{h^3\left(3\,a + b\right)}{12}$$



1/4 de cercle

$$S = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_u = 0{,}05488 \quad R^4$$